

Nome:

Cognome:

Matricola:

**Fila A**

**Regole:** Voto minimo di ogni esercizio = 0. Esercizi 1-4: risposta giusta =1, risposta non data = 0, risposta sbagliata =  $-\frac{1}{2}$ . Esercizi 5-6: punti 0-8.

**Esercizio 1** Sia  $f \in C^0(\mathbb{R})$  diversa dalla funzione nulla e si consideri l'equazione differenziale  $w'' + 4w' + 3w = f(x)$ .

1. Se  $f(x) = 2 \cos(3x) + 2$ , allora  $y(x) = -4e^{3x} + \cos(3x) + 6$  è una soluzione.  V  F
2. Se le funzioni  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  sono soluzioni dell'equazione, allora  $3y_1(x) + y_2(x)$  è soluzione.  V  F
3. Se  $f$  è costante, allora ogni soluzione  $y$  è costante.  V  F
4. Se  $y$  è soluzione dell'equazione omogenea, allora  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$ .  V  F

**Esercizio 2** Data una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua e derivabile

1. Se  $f(x) \geq 0$ , la funzione  $g(x) = \sqrt{f(x)}$  è derivabile.  V  F
2. Se  $f'(x_0) = 0$  la funzione  $g(x) = |f(x)|$  è derivabile in  $x_0$ .  V  F
3. Se  $f(x) > 0$  la funzione  $f(x)^2 - 1$  è crescente.  V  F
4. Se  $f$  è decrescente, allora esiste finito  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{f(x)}$ .  V  F

**Esercizio 3** Per ogni successione  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  convergente ad un certo  $a \in \mathbb{R}$  si ha:

1. Se  $a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$ , allora  $a > 0$ .  V  F
2. La serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{a_n}}{\sqrt{1+n^3}}$  è convergente.  V  F
3. La successione  $\sqrt{n}(e^{-a_n} + e^{a_n})$  diverge a  $+\infty$ .  V  F
4. La successione  $\cos(a_n)$  non ammette limite.  V  F

**Esercizio 4** Sia  $f(x)$  una funzione convessa di classe  $C^1$  in  $\mathbb{R}$

1. Se esistono  $x_1 > x_0$  tali che  $f(x_1) > f(x_0)$  allora  $f(x)$  è illimitata superiormente  V  F
2. Se esistono  $x_1 > x_0$  tali che  $f(x_1) = f(x_0)$  allora  $f(x)$  ha minimo assoluto  V  F
3. Se  $f(x)$  è monotona crescente allora è illimitata inferiormente  V  F
4. Se  $f(x)$  non è costante e ha un punto di minimo assoluto allora è illimitata superiormente  V  F

**Esercizio 5** Data la funzione  $f(x) = 5e^{\frac{x-1}{x+1}}$  determinare

1. il dominio ed eventuali asintoti di  $f$ ;
2. il (valore) massimo e minimo di  $f$  in  $[2, 6]$ ;
3. Disegnare un grafico qualitativo della funzione  $f$ ;
4. Trovare eventuali punti di minimo o massimo relativo per la funzione  $g(x) = \frac{x}{x+1}f(x)$ .

**Esercizio 6** Siano  $\alpha \geq 0, \beta \in \mathbb{R}$  e sia  $f_{\alpha,\beta} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f_{\alpha,\beta}(x) := |x|^\alpha e^{\beta x^2}$ .

1. Per  $\alpha = 1, \beta = 2$  calcolare  $\int_{-1}^1 f(x) dx$ .
2. Per  $\alpha = 2, \beta = 2$  calcolare  $\int_0^5 f(x) dx$ .
3. Determinare per quali  $\alpha \geq 0, \beta \in \mathbb{R}$  esiste finito l'integrale improprio  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ .
4. Determinare per quali  $\alpha \geq 0, \beta \in \mathbb{R}$  esiste infinito l'integrale (in senso improprio)  $\int_0^2 \frac{1}{f(x)} dx$ .